

“TLEM1_3”
理論編

2018年8月

小長井 一男

1. スウェイ・ロッキング運動の定式化

地盤の運動の記述

円筒状の基礎構造物が水平成層地盤内に埋設されている問題なので円筒座標系で運動方程式を記述する:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_\theta}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} - 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\omega}_\theta) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \tilde{\omega}_r}{\partial \theta} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

ここに

$$\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{発散}) \quad (1.1a)$$

$$2\tilde{\omega}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad (r\text{軸周り } (z\theta\text{面内}) \text{ 回転}) \quad (1.1b)$$

$$2\tilde{\omega}_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (\theta\text{軸周り } (rz\text{面内}) \text{ 回転}) \quad (1.1c)$$

$$2\tilde{\omega}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (z\text{軸周り } (r\theta\text{面内}) \text{ 回転}) \quad (1.1d)$$

ここにラメの定数 λ , μ は複素数であり、その虚数部は土の履歴減衰を表現する。基礎構造物は x 方向に加振されるとすると (Fig. 1.1), その変位の各成分は z 方向に変化するポテンシャル関数 $\phi(z)$, $\Psi(z)$, $W(z)$ で以下のように表現できる:

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (1.2)$$

$$\text{with } \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2^{(2)}(\alpha r) & H_0^{(2)}(\alpha r) & 0 \\ H_2^{(2)}(\alpha r) & -H_0^{(2)}(\alpha r) & 0 \\ 0 & 0 & H_1^{(2)}(\alpha r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(z) \\ \Psi(z) \\ W(z) \end{bmatrix} \quad (\text{変数分離}) \quad (1.3)$$

ここに $H_j^{(2)}(\alpha r)$ は j 次の第二種ハンケル関数である。

式(1.2)、(1.3)を式 (1.1)に代入すれば:

$$\alpha^2 \mu (\phi + \Psi) - \mu \frac{d^2}{dx^2} (\phi + \Psi) - \rho \omega^2 (\phi + \Psi) = 0 \quad (1.4)$$

$$\alpha^2 (\lambda + 2\mu) (\phi - \Psi) - \mu \frac{d^2}{dx^2} (\phi - \Psi) + \alpha (\lambda + \mu) \frac{dW}{dz} - \rho \omega^2 (\phi - \Psi) = 0 \quad (1.5)$$

$$-\alpha (\lambda + \mu) \frac{d}{dz} (\phi - \Psi) + \alpha^2 \mu W - (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 W}{dz^2} - \rho \omega^2 W = 0 \quad (1.6)$$

とそれぞれ $\phi + \Psi$ (式(1.4)) と $\phi - \Psi$ および W が連成した式(1.5), (1.6)に分離できる。この3式について、有限要素法における直線近似を使って層要素に対する解を求める。

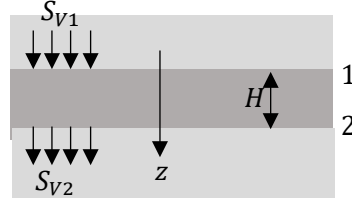


Fig. 1.1 Soil slice

そのためにはガラーキソ法を用いばよい。まず層厚 H なる要素Fig. 1.1を考、その上下の境界面を ($j = 1, 2$)と置き、 p 方向 (水平または鉛直方向) に作用する応力 S_{jp} を考。この境界面($j = 1, 2$)のいずれかに1なる変位が生じた場合の深さ方向変位を N_j とすれば式 (1.4), (1.5)あるいは (1.6)に、この N_j を乗じ、層厚 H に亘って積分することで以下を得る:

$$\int_{-H/2}^{H/2} -N_j F_p dz = \{K_{jp}\}^T \{U\} - s_{jp} = 0 \quad (1.7)$$

ここに F_p は p 方向の運動方程式であり、 s_{jp} は層境界表面に発生する応力である。そして

$$N_j (= \text{局所形状関数}) = \begin{cases} 1/2 - z/H & (\text{for } j = 1) \\ 1/2 + z/H & (\text{for } j = 2) \end{cases} \quad (1.7a) \text{ and } (1.7b)$$

$$\{K_{jp}\} = \text{境界面での剛性マトリックス}$$

$$\{U\} = \text{境界面変位}$$

ガラーキソ法の適用に当たって応力成分もポテンシャル関数で表現してみる。

$$\sigma_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \mu \left[\left(\frac{d\phi}{dz} - \frac{\alpha}{2} W \right) H_2^{(2)}(\alpha r) + \left(\frac{d\Psi}{dz} + \frac{\alpha}{2} W \right) H_0^{(2)}(\alpha r) \right] \quad (1.8)$$

$$\sigma_{z\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \mu \left[\left(\frac{d\phi}{dx} - \frac{\alpha}{2} W \right) H_2^{(2)}(\alpha r) - \left(\frac{d\Psi}{dx} + \frac{\alpha}{2} W \right) H_0^{(2)}(\alpha r) \right] \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \left[\lambda \alpha (\phi - \Psi) + (\lambda + 2\mu) \frac{dW}{dz} \right] H_1^{(2)}(\alpha r) \end{aligned} \quad (1.10)$$

式 (1.8), (1.9), (1.10)は以下のように行列式でまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{zr} \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_2^{(2)}(\alpha r) - H_0^{(2)}(\alpha r) & H_2^{(2)}(\alpha r) + H_0^{(2)}(\alpha r) & 0 \\ H_2^{(2)}(\alpha r) + H_0^{(2)}(\alpha r) & H_2^{(2)}(\alpha r) - H_0^{(2)}(\alpha r) & 0 \\ 0 & 0 & 2H_1^{(2)}(\alpha r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

ここに

$$\tilde{\sigma}_1 = \mu \left[\frac{d}{dz} (\phi - \Psi) - \alpha W \right], \quad \tilde{\sigma}_2 = \mu \frac{d}{dz} (\phi + \Psi), \quad \tilde{\sigma}_3 = \alpha \lambda (\phi - \Psi) + (\lambda + 2\mu) \frac{dW}{dz} \quad (1.12a), (1.12b), (1.12c)$$

式 (1.3)から変位ベクトルも同じような形式で以下のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_2^{(2)}(\alpha r) - H_0^{(2)}(\alpha r) & H_2^{(2)}(\alpha r) + H_0^{(2)}(\alpha r) & 0 \\ H_2^{(2)}(\alpha r) + H_0^{(2)}(\alpha r) & H_2^{(2)}(\alpha r) - H_0^{(2)}(\alpha r) & 0 \\ 0 & 0 & 2H_1^{(2)}(\alpha r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi - \Psi \\ \phi + \Psi \\ W \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

式(1.11) と式(1.13)の係数行列は互いに等しい。したがって $(\tilde{\sigma}_1 \ \tilde{\sigma}_2 \ \tilde{\sigma}_3)^T$ と $(\phi - \Psi \ \phi + \Psi \ W)^T$ の双方に同じ内挿関数 (式(1.7)) を用いても、層内どこでも応力、変位関係に破綻は生じない。そこで $(\tilde{\sigma}_1 \ \tilde{\sigma}_2 \ \tilde{\sigma}_3)^T$ と $(\phi - \Psi \ \phi + \Psi \ W)^T$ の双方について層要素の上面、下面の値を以下のように示す。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{21} \end{bmatrix} &= \mu \begin{bmatrix} -\frac{d}{dz}(\phi - \Psi)|_1 + \alpha W_1 \\ \frac{d}{dz}(\phi - \Psi)|_2 - \alpha W_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{12} \\ \tilde{\sigma}_{22} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} -\frac{d}{dz}(\phi + \Psi)|_1 \\ \frac{d}{dz}(\phi + \Psi)|_2 \end{bmatrix}, \text{ and} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{13} \\ \tilde{\sigma}_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\alpha\lambda(\phi - \Psi)|_1 - (\lambda + 2\mu)\frac{dW}{dz}|_1 \\ \alpha\lambda(\phi - \Psi)|_2 + (\lambda + 2\mu)\frac{dW}{dz}|_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.14a), (1.14b) \text{ and } (1.14c)$$

層内ではポテンシャル関数 $\phi(z)$ 、 $\Psi(z)$ 、 $W(z)$ が N_1 と N_2 を用いて以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \Psi \\ W \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \Psi_1 \\ W_1 \end{bmatrix} + N_2 \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \Psi_2 \\ W_2 \end{bmatrix} \text{ with } N_1 = 1/2 - \frac{z}{H} \text{ and } N_2 = 1/2 + \frac{z}{H} \quad (1.15)$$

例えば式(1.5) に式(1.15)を代入し、層上面 ($j = 1$) について式(1.7)の積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_{-H/2}^{H/2} N_1 F_1 dz &= \alpha^2(\lambda + 2\mu) \frac{H}{3} (\phi_1 - \Psi_1) + \alpha^2(\lambda + 2\mu) \frac{H}{6} (\phi_2 - \Psi_2) + \frac{\mu}{H} (\phi_1 - \Psi_1) \\ &\quad - \frac{\mu}{H} (\phi_2 - \Psi_2) + \alpha \frac{(\lambda + \mu)}{2} (W_2 - W_1) - \rho\omega^2 \frac{H}{3} (\phi_1 - \Psi_1) \\ &\quad - \rho\omega^2 \frac{H}{6} (\phi_2 - \Psi_2) + \mu \frac{d}{dz}(\phi - \Psi)|_1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

同様の表現は層下面 ($j = 2$) についても得ることができる。これらを式(1.14)の境界条件を考慮してまとめれば以下を得る。

$$\begin{aligned} &\alpha^2(\lambda + 2\mu) \frac{H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 - \Psi_1 \\ \phi_2 - \Psi_2 \end{bmatrix} + \frac{\mu}{H} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 - \Psi_1 \\ \phi_2 - \Psi_2 \end{bmatrix} \\ &+ \alpha \begin{bmatrix} -\frac{(\lambda - \mu)}{2} & \frac{(\lambda + \mu)}{2} \\ -\frac{(\lambda + \mu)}{2} & \frac{(\lambda - \mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} - \rho\omega^2 \frac{H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 - \Psi_1 \\ \phi_2 - \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.17)$$

同様に式(1.4)を積分すれば、

$$(\alpha^2[A_s]^e + [G_s]^e - \omega^2[M]^e)\{\phi + \Psi\}^e = \{\tilde{\sigma}_2\} \quad (1.18)$$

ここで、

$$[A_s]^e = \mu \frac{H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [G_s]^e = \frac{\mu}{H} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [M]^e = \rho \frac{H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ and}$$

$$\{\phi + \Psi\}^e = \begin{bmatrix} \phi_1 + \Psi_1 \\ \phi_2 + \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (1.18a), (1.18b), (1.18c) \text{ and } (1.18d)$$

上添字 e のついた上述の行列はこれらがそれぞれの層要素に対応するものであることを示す。同様に式(1.5)および式(1.6)の積分も以下の式(1.19), (1.20)に帰着する。

$$(\alpha^2[A_p]^e + [G_s]^e - \omega^2[M]^e)\{\phi - \Psi\}^e - \alpha([B]^e)^T\{W\}^e = \{\tilde{\sigma}_1\} \quad (1.19)$$

$$-\alpha[B]^e\{\phi - \Psi\}^e + (\alpha^2[A_s]^e + [G_p]^e - \omega^2[M]^e)\{W\}^e = \{\tilde{\sigma}_3\} \quad (1.20)$$

ここに、

$$[A_p]^e = (\lambda + 2\mu) \frac{H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, [G_p]^e = \frac{(\lambda + 2\mu)}{H} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \{\phi - \Psi\}^e = \begin{bmatrix} \phi_1 - \Psi_1 \\ \phi_2 - \Psi_2 \end{bmatrix},$$

$$[B]^e = \begin{bmatrix} \frac{\lambda - \mu}{2} & \frac{\lambda + \mu}{2} \\ -\frac{\lambda + \mu}{2} & -\frac{\lambda - \mu}{2} \end{bmatrix}, \text{ and } \{W\}^e = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (1.20a), (1.20b), (1.20c)$$

$$(1.20d) \text{ and } (1.20e)$$

これらの要素ごとの表現を重ね合わせ、地盤全体の方程式を求めてみる。そのためポテンシャル関数で表現される変位についても、境界面の変位を並べ以下のようにベクトルとして表現する。

$$\begin{cases} \{\phi - \Psi\} = \{\phi_1 - \Psi_1 & \phi_2 - \Psi_2 & \cdots & \phi_N - \Psi_N\}^T \\ \{\phi + \Psi\} = \{\phi_1 + \Psi_1 & \phi_2 + \Psi_2 & \cdots & \phi_N + \Psi_N\}^T \\ \{W\} = \{W_1 & W_2 & \cdots & W_N\}^T \end{cases} \quad (1.21)$$

ここで添え字の1, 2, ..., N は地表面からの層境界面の番号を示す。これらの変位ベクトルをさらに簡易な記号を用いて以下のように書き換える。

$$\{\phi - \Psi\} = \{X\}, \quad \{\phi + \Psi\} = \{Y\} \quad \text{and} \quad \{W\} = \{Z\} \quad (1.22)$$

添え字“ e ”のある要素ごとの行列は**Fig. 1.2**のように全体行列の所定の位置に重ね書きされ、さらに自由表面での応力が0であること、また層境界面に外部からかかる力も0であることを考慮すれば、以下の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (\beta^2[A_s] + [G_s] - \omega^2[M])\{Y\} &= 0 \\ (\alpha^2[A_p] + [G_s] - \omega^2[M])\{X\} - \alpha[B]^T\{Z\} &= 0 \\ -\alpha[B]\{X\} + (\alpha^2[A_s] + [G_p] - \omega^2[M])\{Z\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.23), (1.24) \text{ and } (1.25)$$

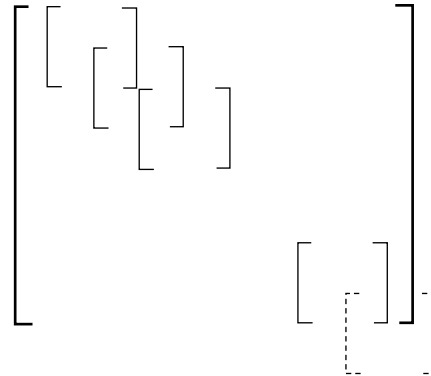


Fig. 1.2 Global matrix

上記の式は α 、また β に関する固有方程式になっている。ここで式(1.23)について

は、固有値 β で独立した方程式になっていて、式(1.24)および式(1.25)のように α を固有値とする連立固有方程式ではない。まず式(1.24)および式(1.25)から $\{Z\}$ を消去すると、

$$(\alpha^4 S_4 + \alpha^2 S_2 + S_0)\{X\} = 0 \quad (1.26)$$

ここに、

$$S_4 = [A_s]([B]^{-1})^T [A_p] \quad (1.27a)$$

$$S_2 = [A_s]([B]^{-1})^T [G_s] + [G_p]([B]^{-1})^T [A_p] - \omega^2 [A_s]([B]^{-1})^T [M] - \omega^2 [M]([B]^{-1})^T [A_p] - [B] \quad (1.27b) \text{ and}$$

$$S_0 = ([G_p] - \omega^2 [M])([B]^{-1})^T ([G_s] - \omega^2 [M]) \quad (1.27c)$$

同様に $\{X\}$ を消去すれば、

$$(\alpha^4 S_4 + \alpha^2 S_2 + S_0)\{Z\} = 0 \quad (1.28)$$

ここに、

$$S_4 = [A_p][B]^{-1}[A_s] \quad (1.28a)$$

$$S_2 = [A_p][B]^{-1}[G_p] + [G_s][B]^{-1}[A_s] - \omega^2 [A_p][B]^{-1}[M] - \omega^2 [M][B]^{-1}[A_s] - [B]^T \quad (1.28b) \text{ and}$$

$$S_0 = ([G_s] - \omega^2 [M])[B]^{-1}([G_p] - \omega^2 [M]) \quad (1.28c)$$

式(1.26) は以下のようなサイズ $2N \times 2N$ の固有方程式に書き直すことができる。

$$\begin{pmatrix} 0 & S_0 \\ S_0 & S_2 \end{pmatrix} - \alpha^2 \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & -S_4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{\hat{X}\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.29)$$

$$\text{with } \{\hat{X}\} = \alpha^2 \{X\} \quad (1.29a)$$

そしてさらに一般的な以下の固有方程式になる。

$$[S_{eigen}] \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{\hat{X}\} \end{Bmatrix} = \alpha^2 \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{\hat{X}\} \end{Bmatrix} \quad (1.29b)$$

$$\text{with } [S_{eigen}] = \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & -S_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & S_0 \\ S_0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (1.29c)$$

式(1.29b)には複素数のラメの定数が含まれているので、 $2N$ 個の α^2 の固有値が存在する。したがってその平方根の α については $4N$ 個の解が存在することになるが、 $r \xrightarrow{\text{yields}} \infty$ の遠方で、第2種ハンケル関数がかかっている応力や変位が収斂するためには α の虚数部が負の解しか適さない。したがって固有値の数は半分の $2N$ になる。

等価直立梁の周面での境界条件

群杭と等価な、断面が円形の直立梁の周面($r = R$)で応力、変位が連続にならないといけないので、この孔壁に外力が作用したときの変位との関係を求めておく必要がある。この場合、孔壁周面での変位の分布は半径方向、上下方向変位が $\cos \theta$ に、接線方向変位が $\sin \theta$ に比例するので、これらは前出の $(v_r \ v_\theta \ v_z)$ に相応する。したがって式(1.3)に倣い、各層境界面での孔壁位置($r = R$)での変位成分で構成されたベクトル $\{V_r\}$, $\{V_\theta\}$, $\{V_z\}$ でこれらを表現することにする。

$$\begin{aligned}
 \{V_r\} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \{H_2^{(2)}(\alpha R) - H_0^{(2)}(\alpha R)\} \{X\}_{\alpha} q_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\beta} \{H_2^{(2)}(\beta R) + H_0^{(2)}(\beta R)\} \{Y\}_{\beta} q_{\beta} \\
 \{V_{\theta}\} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \{H_2^{(2)}(\alpha R) + H_0^{(2)}(\alpha R)\} \{X\}_{\alpha} q_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\beta} \{H_2^{(2)}(\beta R) - H_0^{(2)}(\beta R)\} \{Y\}_{\beta} q_{\beta} \\
 \{V_z\} &= \sum_{\alpha} H_1^{(2)}(\alpha R) \{Z\}_{\alpha} q_{\alpha}
 \end{aligned} \tag{1.30a), (1.30b) and (1.30c)}$$

ここに、 $\{X\}_{\alpha}$ および $\{Z\}_{\alpha}$ は固有値 α に対する固有ベクトルであり、 $\{Y\}_{\beta}$ は固有値 β に対する固有ベクトルである。それぞれの固有ベクトルには重み q_{α} および q_{β} が乗じられていてその線形和をとる形になっている。そこでそれらの固有ベクトルを1次から順に並べて以下のモーダルマトリックス $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned}
 [X] &= [\{X\}_1 \quad \{X\}_2 \quad \dots \quad \{X\}_{2N}] \\
 [Y] &= [\{Y\}_1 \quad \{Y\}_2 \quad \dots \quad \{Y\}_{2N}] \\
 [Z] &= [\{Z\}_1 \quad \{Z\}_2 \quad \dots \quad \{Z\}_{2N}]
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

ここで $[X]$, $[Z]$ は $N \times 2N$ 行列、一方で $[Y]$ は $N \times N$ 行列である。ハンケル関数には以下の性質がある。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{H_2^{(2)}(\alpha R) + H_0^{(2)}(\alpha R)}{\frac{H_1^{(2)}(\alpha R)}{\alpha R}} &= 2 \\
 \frac{H_2^{(2)}(\alpha R) - H_0^{(2)}(\alpha R)}{\frac{H_1^{(2)}(\alpha R)}{\alpha R}} &= 2f_{\alpha}
 \end{aligned} \right\} \tag{1.32a) and (1.32b)}$$

$$\text{with } f_{\alpha} = 1 - \alpha R \frac{H_0^{(2)}(\alpha R)}{H_1^{(2)}(\alpha R)} \tag{1.32c}$$

そこで以下の記号を導入すると、

$$f_{\alpha} = 1 - \alpha R \frac{H_0^{(2)}(\alpha R)}{H_1^{(2)}(\alpha R)}, \quad f_{\beta} = 1 - \beta R \frac{H_0^{(2)}(\beta R)}{H_1^{(2)}(\beta R)} \tag{1.32c), (1.32d)}$$

$$\tilde{q}_{\alpha} = q_{\alpha} \frac{H_1^{(2)}(\alpha R)}{\alpha R}, \quad \tilde{q}_{\beta} = q_{\beta} \frac{H_1^{(2)}(\beta R)}{\beta R} \tag{1.32e), (1.32f)}$$

式(1.30) は孔壁部 ($r = R$) では以下のように書き直すことができる。

$$\begin{bmatrix} \{V_r\} \\ \{V_{\theta}\} \\ \{V_z\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [X] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} & [Y] \\ [X] & [Y] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \\ [Z] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{q}_{\alpha}\} \\ \{\tilde{q}_{\beta}\} \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

孔壁部断面が完全な円形を保つとすれば、

$$\{V_r\} + \{V_{\theta}\} = 0 \tag{1.34}$$

式(1.34) を式(1.33)に代入すると、以下の式を得る。

$$[X] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \{\tilde{q}_{\alpha}\} + [Y] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \{\tilde{q}_{\beta}\} = 0 \tag{1.35}$$

式(1.35)から ハンケル関数のかかった重み係数ベクトル $\{\tilde{q}_{\beta}\}$ は同じく重み係数

ベクトル $\{\tilde{q}_\alpha\}$ を用いて以下のように表現できる。

$$\{\tilde{q}_\beta\} = - \left[\begin{array}{c} 1 \\ f_{\beta..} \end{array} \right]^{-1} [Y]^{-1} [X] \left[\begin{array}{c} 1 \\ f_{\alpha..} \end{array} \right] \{\tilde{q}_\alpha\} = [E] \{\tilde{q}_\alpha\} \quad (1.36)$$

ここに、行列 $[E]$ のサイズは $N \times 2N$ である。かくして式(1.33)は縮合され、以下の $2N \times 2N$ の行列 $[J_H]$ を用いて記述できる。

$$\begin{bmatrix} \{V_r\} \\ \{V_z\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [X] \left[\begin{array}{c} 1 \\ f_{\alpha..} \end{array} \right] + [Y][E] \\ [Z] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \alpha R.. \end{array} \right] \end{bmatrix} \{\tilde{q}_\alpha\} = [J_H] \{\tilde{q}_\alpha\} \quad (1.37)$$

一方、孔壁に作用する表面力 $(p_r \ p_\theta \ p_z)$ は以下のように記述できる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_z \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

右辺の負号は作用応力の正の方向を座標軸の正の方向と一致させるためである。一般の変位と応力の関係式に、式(1.13)を代入すれば、表面力と変位ポテンシャル $\phi - \Psi$, $\phi + \Psi$, W の関係は以下のように記述できる。

$$\begin{aligned} p_r &= - \left[\lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right]_{r=R} \\ &= \left(\frac{2\mu}{R} H_0^{(2)}(\alpha R) - (\lambda + 2\mu) \alpha H_1^{(2)}(\alpha R) \right) (\phi - \Psi) + \\ &\quad \frac{2\mu}{R} H_2^{(2)}(\beta R) (\phi + \Psi) - \lambda \frac{dW}{dz} H_1^{(2)}(\alpha R) \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} p_\theta &= -\mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta + v_r}{r} \right)_{r=R} \\ &= \frac{2\mu}{R} H_2^{(2)}(\alpha R) (\phi - \Psi) + \left(\frac{2\mu}{R} H_2^{(2)}(\beta R) - \mu \beta H_1^{(2)}(\beta R) \right) (\phi + \Psi) \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} p_z &= -\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{r=R} \\ &= -\frac{\mu}{2} \left(H_2^{(2)}(\alpha R) - H_0^{(2)}(\alpha R) \right) \frac{d}{dx} (\phi - \Psi) - \frac{\mu}{2} \left(H_2^{(2)}(\beta R) + H_0^{(2)}(\beta R) \right) \frac{d}{dx} (\phi + \Psi) \\ &\quad + \frac{\mu}{2} \alpha \left(H_2^{(2)}(\alpha R) - H_0^{(2)}(\alpha R) \right) W \end{aligned} \quad (1.41)$$

式(1.40), (1.41)から、単位深さ当たりの x 方向の合力 \bar{P}_x と y 軸まわりのモーメント \bar{M}_y を求めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \bar{P}_x &= -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) R d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (p_r \cos^2 \theta - p_\theta \sin^2 \theta) R d\theta \\ &= \pi R (p_r - p_\theta) \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\text{with } p_r - p_\theta = -(\lambda + 2\mu) \alpha H_1^{(2)}(\alpha R) (\phi - \Psi) + \mu \beta H_1^{(2)}(\beta R) (\phi + \Psi) - \lambda \frac{dW}{dz} H_1^{(2)}(\alpha R) \quad (1.43)$$

$$\bar{M}_y = -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rz} R \cos \theta R d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_z R^2 \cos^2 \theta d\theta = \pi R^2 p_z \quad (1.44)$$

\bar{P}_x , \bar{M}_y は z 方向に連続しているが、これを離散的に層境界面での集中荷重で表現する。これは N_j を用いた重み積分を実施すればよい。

$$P_{jx} = \pi R \int_{-H/2}^{H/2} N_j (p_r - p_\theta) dz$$

$$M_{jy} = \pi R^2 \int_{-H/2}^{H/2} N_j p_z dz$$
(1.45)

これらの積分の結果を整理すると、各要素について以下を得る。

$$\frac{1}{\pi R} \{P_x\}^e = \left(-\alpha \frac{(\lambda + 2\mu)H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \right) H_1^{(2)}(\alpha R)$$

$$+ \beta \frac{\mu H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} H_1^{(2)}(\beta R)$$

$$\frac{1}{\pi R} \left\{ \frac{M_y}{R} \right\}^e = \frac{\mu}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} (H_2^{(2)}(\alpha R) - H_0^{(2)}(\alpha R))$$

$$+ \frac{\mu}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} (H_2^{(2)}(\beta R) + H_0^{(2)}(\beta R))$$

$$+ \alpha \frac{\mu H}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} (H_2^{(2)}(\alpha R) + H_0^{(2)}(\alpha R))$$

これら各層の要素マトリックスを全体マトリックスとして重ね合わせれば以下を得る。

$$\frac{1}{\pi R} \{P_x\} = R(-[A_p][X][\alpha^2] + [B_\lambda]^T[Z][\alpha])\{\tilde{q}_\alpha\} + R[A_s][Y][\beta^2]\{\tilde{q}_\beta\}$$

$$\frac{1}{\pi R} \left\{ \frac{M_y}{R} \right\} = \left(\frac{1}{2}[B_\mu]^T[X] + \frac{1}{2}[A_s][Z][\alpha] \right) \{2f_\alpha\}\{\tilde{q}_\alpha\} + \frac{1}{2}[B_\mu]^T[Y]\{2\tilde{q}_\beta\}$$

$$\text{with } [B_\lambda]^e = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } [B_\mu]^e = \frac{\mu}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

さらに、

$$\frac{1}{\pi R} \begin{bmatrix} \{P_x\} \\ \left\{ \frac{M_y}{R} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-[A_p][X][\alpha^2] + [B_\lambda]^T[Z][\alpha] + [A_s][Y][\beta^2])[E]R \\ [B_\mu]^T([X][f_\alpha] + [Y][E]) + [A_s][Z][\alpha f_\alpha] \end{bmatrix} \{\tilde{q}_\alpha\}$$

$$= [D_H]\{\tilde{q}_\alpha\} \quad (1.46)$$

式(1.37) および式(1.46)から孔壁での層境界面で離散化された変位と力の関係を以下のように求めることができる。

$$\begin{bmatrix} \{P_x\} \\ \left\{ \frac{M_y}{R} \right\} \end{bmatrix} = [R_H] \begin{bmatrix} \{V_r\} \\ \{V_z\} \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

$$\text{with } [R_H] = \pi R [D_H][J_H]^{-1} \quad (1.47a)$$

等価直立梁の剛性マトリックス、およびこれを組み込んだ全体系の運動方程式 N_L 枚の地層が水平に堆積した地盤内の n_p 本の杭からなる群杭基礎と等価な梁モデルの剛性マトリックスを誘導するために以下の仮定が設定される。

- (1) 群杭は変形時に杭間隔を変えずに、杭の間にはさまれた土とともに動く、
- (2) 杭間にはさまれた土から杭にかかるせん断力によって生じるモーメントは無視できる、

- (3) 杭頭は剛体のフーチングによってその回転を拘束されている,
- (4) 地盤・杭は水平に分割された要素からなるものとする. 各々の要素の端面と杭の中立軸が交わる点は, いかなる変形状態でも同一平面上に存在するものとする. ただしこれは杭の切断面がこの平面と一致することを意味しない (Fig. 1.3).

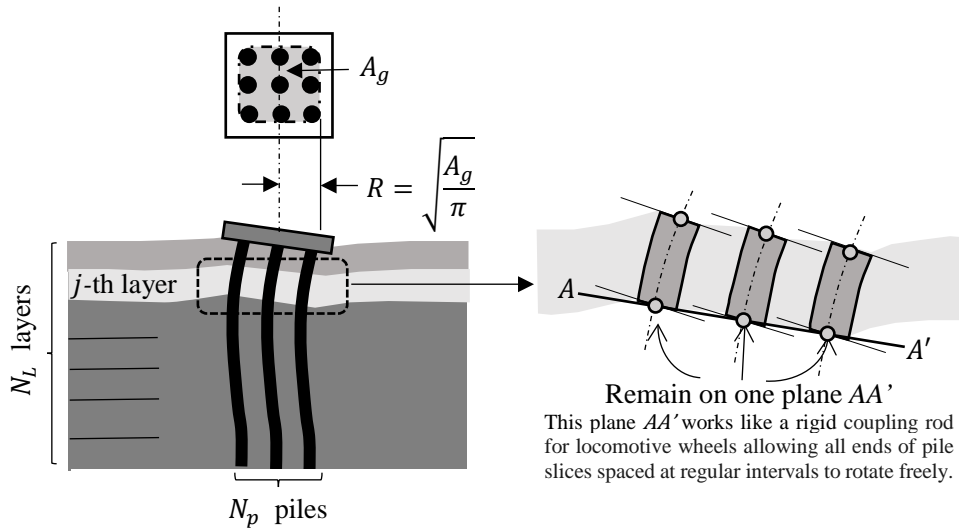


Fig. 1.3 Equivalent single upright beam

仮定(1), (2)から, これらの杭はいずれもが同様の曲げ変形をすることになり, したがってその水平変位は杭によらず一律の変位ベクトル $\{u_x\}$ で記述できることになる. したがって群杭と地盤を図に示すように水平に分割した場合, 各杭要素のたわみ角の増分 $\{\Delta\theta\}$ はこの変位ベクトル $\{u_x\}$ を用いて以下のように表現できる:

$$\{\Delta\theta\} = [L]\{u_x\} + \left\{ \frac{w_1}{R} \quad \vdots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}^T \quad (1.48)$$

ここに

$$[L] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_1} & \frac{1}{H_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{H_1} & -\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} & 0 & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{H_2} & -\frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} & \frac{1}{H_3} & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1/H_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{H_{N_L-1}} & -\frac{1}{H_{N_L-1}} - \frac{1}{H_{N_L}} \end{bmatrix} \quad (1.48a)$$

であり, w_1 は直立梁側面最上部 (杭頭フーチング端部) の鉛直方向変位, そして R は等価な直立梁の半径であり, 群杭を包絡する柱の断面 A_G と面積の等しい円の

半径である。

この $\{\Delta\theta\}$ に三連モーメントの定理を用いることで、杭に沿ったモーメントの分布 $\{M_y\}$ は以下のように表現できる。

$$\{M_y\} = [D]^{-1}\{\Delta\theta\} \quad (1.49)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 2\frac{H_1}{EI_p} & \frac{H_1}{EI_p} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{H_1}{EI_p} & 2\left(\frac{H_1}{EI_p} + \frac{H_2}{EI_p}\right) & \frac{H_2}{EI_p} & 0 & & \vdots \\ 0 & \frac{H_2}{EI_p} & 2\left(\frac{H_2}{EI_p} + \frac{H_3}{EI_p}\right) & \frac{H_3}{EI_p} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{H_3}{EI_p} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \frac{H_{N_L-1}}{EI_p} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{H_{N_L-1}}{EI_p} & 2\left(\frac{H_{N_L-1}}{EI_p} + \frac{H_{N_L}}{EI_p}\right) \end{bmatrix} \quad (1.49a)$$

ここに $EI_p = n_p \times E_p I_p$ であり $E_p I_p$ は群杭を構成する杭単独の曲げ剛性である。

$\{M_y\}$ はこの等価梁にかかる水平力ベクトル $\{P_x\}$ と以下の関係がある。

$$\{M_y\} = [L]^{-1}\{P_x\}$$

したがって等価な直立梁の変形が地盤に加える水平力 $\{P_x\}$ は以下のように表現される。

$$\{P_x\} = [L][D]^{-1}\left\{[L]\{u_x\} + \left\{\frac{w_1}{R} \quad ; \quad 0 \quad \cdots \quad 0\right\}^T\right\} \quad (1.50)$$

以上は直立梁の水平動による反力を記述したが、以下、直立梁の各要素がその中立軸を中心として平面保持の仮定（仮定(4)）のもとに曲げ変形をする場合の定式化に進む。この場合、梁のロッキングは梁側面の鉛直変位ベクトル $\{w\}$ によって以下のように記述される。

$$\left\{\frac{M_y}{R}\right\} = [Q]\{w\} \quad (1.51)$$

ここに、

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{EI^G}{R^2 H_1} & -\frac{EI^G}{R^2 H_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{EI^G}{R^2 H_1} & \frac{EI^G}{R^2 H_1} + \frac{EI^G}{R^2 H_2} & -\frac{EI^G}{R^2 H_2} & 0 & & \vdots \\ 0 & -\frac{EI^G}{R^2 H_2} & \frac{EI^G}{R^2 H_2} + \frac{EI^G}{R^2 H_3} & -\frac{EI^G}{R^2 H_3} & & \vdots \\ \vdots & 0 & -\frac{EI^G}{R^2 H_3} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \frac{EI^G}{R^2 H_{N_L-1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{EI^G}{R^2 H_{N_L-1}} & \frac{EI^G}{R^2 H_{N_L-1}} + \frac{EI^G}{R^2 H_{N_L}} \end{bmatrix} \quad (1.51a)$$

であり、 EI^G は、**図1.3**における等価直立梁を、杭を鉄筋とする鉄筋コンクリートのように見立てて算定された曲げ剛性である。一方水平方向変位 $\{u_x\}$ によって杭頭フーチング部に発生するモーメント M_1 は、以下の式で算定され、これが杭頭のモーメントに加算されなければならない。

$$M_1 = \{1st\ row\ of\ matrix\ [D]^{-1}[L]\}\{u_x\}^T + D_{1,1}^{-1} \frac{w_1}{R}$$

ここに $D_{1,1}^{-1}$ は $[D]^{-1}$ の左最上部の要素である。

以上の方程式をまとめると、この等価直立梁の剛性マトリックスは最終的に以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_x \\ \dots \\ M_y \\ R \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [L][D]^{-1}[L] & \vdots & \begin{matrix} 1^{st}\ column\ of\ [L][D]^{-1}\ and \\ zeros\ for\ other\ columns \end{matrix} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1^{st}\ row\ of\ [D]^{-1}[L]\ and \\ zeros\ for\ other\ rows & \vdots & D_{1,1}^{-1}\ and\ [Q] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ \dots \\ w \end{Bmatrix} \\ &= [F_H] \begin{Bmatrix} u_x \\ \dots \\ w \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.52)$$

したがって等価梁単独の運動方程式は

$$([F_H] - \omega^2[M_H]) \begin{Bmatrix} \{u_x\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_x\} \\ \{M_y\} \\ \{R\} \end{Bmatrix}$$

これが水平成層地盤内に埋め込まれているので、 $\{V_r\} = \{u_x\}$ および $\{V_z\} = \{w\}$ の関係から既に誘導した水平成層地盤内の孔壁部での剛性マトリックスである式(1.47)と組み合わせることで以下の全体系の運動方程式を得る。

$$([R_H] + [F_H] - \omega^2[M_H]) \begin{Bmatrix} \{V_r\} \\ \{V_z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_x\} \\ \{M_y\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} \quad (1.53)$$

$$\text{with } [R_H] = \pi R [D_H] [J_H]^{-1} \quad (1.47a)$$

地盤内の任意箇所の変位

式(1.53)を解いて孔壁部での変位 $\{\{V_r\}_R \ \{V_z\}_R\}^T$ が求めたら、これに $[J_H]^{-1}$ を乗じてハンケル関数のかかった重み係数行列 $\{\tilde{q}_\alpha\}$ を求め、これに改めて基礎からの距離 r での $[J_H]$ を求め、これに乗じることで以下のように求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} \{V_r\}_r \\ \{V_\theta\}_r \\ \{V_z\}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [X][\tilde{h}_\alpha(r)f_{\alpha\cdot}] + [Y][\tilde{h}_\beta^*(r)\cdot][E] \\ [X][\tilde{h}_\alpha^*(r)\cdot] + [Y][\tilde{h}_\beta(r)f_{\beta\cdot}][E] \\ [Z][\tilde{h}_\alpha^*(r)\alpha\cdot] \end{bmatrix} [J_H]^{-1} \begin{Bmatrix} \{V_r\}_R \\ \{V_z\}_R \end{Bmatrix} \quad (1.54)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} h_\alpha(r) &= \frac{H_2^{(2)}(\alpha r) - H_0^{(2)}(\alpha r)}{H_2^{(2)}(\alpha R) - H_0^{(2)}(\alpha R)} \\ h_\alpha^*(r) &= \frac{H_2^{(2)}(\alpha r) + H_0^{(2)}(\alpha r)}{H_2^{(2)}(\alpha R) + H_0^{(2)}(\alpha R)} = \frac{H_1^{(2)}(\alpha r) R}{H_1^{(2)}(\alpha R) r} \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

であり、また $h_\beta(r)$, $h_\beta^*(r)$ も単純に式(1.55)の α を β に置き換えて求めることができる。これらは孔壁 R での $[J_H]$ を、距離 r での $[J_H]$ に変換するために必要な係数である。

キネマティック相互作用の評価

等価直立梁の物性をそのまま周辺の地盤の物性に置き換えれば、その応答は実質的に自由地盤の応答と一致すると考えてよい。したがって、土からなる円柱と、等価梁の剛性マトリックス $[F_H]$ の差 $[F_H^*]$ 、および質量マトリックスの差 $[M_H^*]$ が、自由地盤の運動が等価梁に伝達された時の変位の差として現れる。

$$[F_H] \rightarrow [F_H^*], \quad [M_H] \rightarrow [M_H^*]$$

しかしながら $[F_H^*]$ は実質的に $[F_H]$ と大差ないと考えていいので、自由地盤の動きを $\{V_r^*\}$ で表現したとき、等価梁の応答 $\{\{V_r\} \ \{V_z\}\}^T$ は以下のように記述できる。

$$([F_H] - \omega^2[M_H^*]) \begin{Bmatrix} \{V_r\} \\ \{V_z\} \end{Bmatrix} = -[R_H] \left(\begin{Bmatrix} \{V_r\} \\ \{V_z\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{V_r^*\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \right) \quad (1.56)$$

$$\text{ここに } [R_H] = \pi R [D_H] [J_H]^{-1} \quad (1.47a)$$

2. 鉛直加振の場合の定式化

基礎側面地盤の運動

この場合は地盤内部の変位は軸対象になり $r - z$ 面内だけの動きを考えればよい。したがって u_θ , $\tilde{\omega}_r$, および $\tilde{\omega}_z$ を無視して式 (1.1) は以下のように書き直せる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_\theta}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \tilde{\omega}_\theta) &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここに、

$$\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.1a)$$

$$2\tilde{\omega}_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (2.1b)$$

そして周波数領域で変位ポテンシャル関数 (z の関数) を以下のように定める。

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_r \\ v_z \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

$$\text{with } \begin{Bmatrix} v_r \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(\alpha r) & 0 \\ 0 & H_0^{(2)}(\alpha r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(z) \\ W(z) \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

ここに、 ω は円振動数、 $H_j^{(2)}$ は j 次の第2種ハンケル関数である。式(2.3)を式(2.1)に代入すれば以下を得る。

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2(\lambda + 2\mu)\phi - \mu \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \alpha(\lambda + \mu) \frac{dW}{dz} - \rho\omega^2 \phi &= 0 \\ -\alpha(\lambda + \mu) \frac{d\phi}{dz} + \alpha^2 \mu W - (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 W}{dz^2} - \rho\omega^2 W &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

薄層境界での応力は以下のように与えられる。

$$\sigma_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (2.5a)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.5b)$$

さらにこれらの式は以下のように表現できる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{zr} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(\alpha r) & 0 \\ 0 & H_0^{(2)}(\alpha r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

ここに、

$$\tilde{\sigma}_1 = \mu \left(\frac{d\phi}{dz} - \alpha W \right) \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma}_2 = \alpha \lambda \phi + (\lambda + 2\mu) \frac{dW}{dz} \quad (2.6a) \text{ and } (2.6b)$$

さて各要素での変位ベクトル v_r , v_z とポテンシャル ϕ , W を関連付ける行列 (式 (2.3))、および 応力ベクトル σ_{zr} , σ_{zz} と $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ を結びつける行列が (式 (2.6)) が同じであることから、式 (2.4) と式(2.5)に、既出の変位関数を用いたガラーキン法を適用することで以下の式を得る。

$$(\alpha^2 [A_p]^e + [G_s]^e - \omega^2 [M]^e) \{\phi\}^e - \alpha ([B]^e)^T \{W\}^e = \{\tilde{\sigma}_1\} \quad (2.7)$$

$$-\alpha [B]^e \{\phi\}^e + (\alpha^2 [A_s]^e + [G_p]^e - \omega^2 [M]^e) \{W\}^e = \{\tilde{\sigma}_2\} \quad (2.8)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [A_s]^e &= \frac{\mu H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, & [G_s]^e &= \frac{\mu}{H} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ [A_p]^e &= (\lambda + 2\mu) \frac{H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, & [G_p]^e &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{H} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ [B]^e &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda - \mu}{2} & \frac{\lambda + \mu}{2} \\ -\frac{\lambda + \mu}{2} & -\frac{\lambda - \mu}{2} \end{bmatrix} \text{ and } [M]^e &= \rho \frac{H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり、 H は薄層要素の厚さである。これらの要素マトリックスを全体系として重ね合わせることで、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} (\alpha^2 [A_p] + [G_s] - \omega^2 [M]) \{\phi\} - \alpha [B]^T \{W\} &= 0 \\ -\alpha [B] \{\phi\} + (\alpha^2 [A_s] + [G_p] - \omega^2 [M]) \{W\} &= 0 \end{aligned}$$

無限遠での変位が0に収束しなければならないことから上記固有方程式の固有値の数は $2N$ である。さらにこれらの固有値と固有ベクトルを用いれば孔壁での変位は以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} \{V_r\} &= \sum_{\alpha} H_1^{(2)}(\alpha R) \{\phi\}_{\alpha} q_{\alpha} \\ \{V_z\} &= \sum_{\alpha} H_0^{(2)}(\alpha R) \{W\}_{\alpha} q_{\alpha} \end{aligned}$$

ここに q_{α} は固有値 α に対応する固有ベクトルの重みを表現する係数である。したがって固有ベクトルを1次から順番に並べた以下のマトリックスを導入すれば、

$$\begin{aligned} [X] &= [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \cdots \quad \{\phi\}_{2N}] \\ [Z] &= [\{W\}_1 \quad \{W\}_2 \quad \cdots \quad \{W\}_{2N}] \end{aligned}$$

変位と重み係数の関係は以下のように記述できる。

$$\begin{bmatrix} \{V_r\} \\ \{V_z\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [X] \\ [Z] [\ddot{g}_{\alpha..}] \end{bmatrix} \{\tilde{q}_{\alpha}\} = [J_Z] \{\tilde{q}_{\alpha}\} \quad (2.9)$$

$$\text{ここに、 } \{\tilde{q}_{\alpha}\} = q_{\alpha} H_1^{(2)}(\alpha R) \text{ and } g_{\alpha} = \frac{H_0^{(2)}(\alpha R)}{H_1^{(2)}(\alpha R)}$$

一方で、孔壁に沿うせん断応力は、

$$\sigma_{rz} = -\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{r=R}$$

これを全周で積分すれば、以下ようになる。

$$\bar{P}_z = 2\pi R \sigma_{rz} |_{r=R}$$

したがって層境界面での力は、ガラーキソ法を用いることで以下ようになり、

$$\frac{1}{2\pi R} \{P_z\}^e = \frac{\mu}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} H_1^{(2)}(\alpha R) + \alpha \frac{\mu H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} H_1^{(2)}(\alpha R)$$

これらを重ね合わせることで以下の全体系の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi R} \{P_{zs}\} &= \left[[B_{\mu}]^T [X] + [A_s] [Z] [\ddot{\alpha..}] \right] \{\tilde{q}_{\alpha}\} = [D_Z] \{\tilde{q}_{\alpha}\} \\ \text{with } [B_{\mu}]^e &= \frac{\mu}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

式 (2.9) および式 (2.10)から、

$$\{P_{z_s}\} = [R_Z] \begin{Bmatrix} \{V_r\} \\ \{V_z\} \end{Bmatrix} = [R_{Z_1} \quad \dots \quad R_{Z_2}] \begin{Bmatrix} \{V_r\} \\ \{V_z\} \end{Bmatrix}$$

$$\text{ここに } [R_Z] = 2\pi R[D_Z][J_Z]^{-1}$$

したがって孔壁位置での力 $\{P_{z_s}\}$ と変位 $\{V_r\}$ は以下の関係式で表現される。

$$\{P_{z_s}\} = [R_{Z_2}]\{V_z\} \quad (2.11)$$

等価梁の鉛直方向剛性マトリックス

既出の等価梁の仮定をそのまま鉛直方向に適用すれば等価梁の軸方向剛性 EA_{eq} は、 n_p 本の杭と杭間に挟まれた土の軸方向剛性を単純に足し合わせることで、以下のように算出できる。

$$EA_{eq} = n_p E_{pile} A_{pile} + E_{soil} A_{soil} \quad (2.12)$$

ここに E_{pile} および E_{soil} はそれぞれ杭材と地盤のヤング係数であり、 A_{pile} と A_{soil} はそれぞれ単杭の断面積、および群杭間の土の断面積であり、後者は

$$A_{soil} = A_G - n_p A_{pile}$$

で表現される。ここに A_G はFig. 1.3に示す等価梁の断面積である。土のヤング係数 E_{soil} は土のラメの定数 λ および μ から以下の式で算出できる。

$$E_{soil} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

そして最終的にこの等価梁の軸方向の力と変位の関係は

$$\{P_{z_p}\} = [F_Z]\{w\}$$

ここに $[F_Z]$ が求める剛性マトリックスであり以下のように表現される。、

$$[F_Z] = \begin{bmatrix} \frac{EA_{eq}}{H_1} & -\frac{EA_{eq}}{H_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{EA_{eq}}{H_1} & \frac{EA_{eq}}{H_1} + \frac{EA_{eq}}{H_2} & -\frac{EA_{eq}}{H_2} & 0 & & \vdots \\ 0[F_Z] & -\frac{EA_{eq}}{H_2} & \frac{EA_{eq}}{H_2} + \frac{EA_{eq}}{H_3} & -\frac{EA_{eq}}{H_3} & & \vdots \\ \vdots & 0 & -\frac{EA_{eq}}{H_3} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -\frac{EA_{eq}}{H_{N_L-1}} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{EA_{eq}}{H_{N_L-1}} & \frac{EA_{eq}}{H_{N_L-1}} + \frac{EA_{eq}}{H_{N_L}} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

したがって、等価梁の鉛直方向運動方程式は、

$$([F_Z] - \omega^2[M_Z])\{w\} = \{P_{z_p}\} \quad (2.14)$$

となり、 $\{V_z\} = \{w\}$ であることに留意し、これが成層地盤の孔壁で求められた地盤剛性マトリックスと重ね合わせられることで以下の群杭・地盤系の運動方程式を得ることができる。ただし孔壁位置では、半径方向の変位 $\{V_r\}$ は0であると

している。

$$\begin{aligned} & ([R_{Z_2}] + [F_Z] - \omega^2[M_Z])\{V_Z\} = \{P_Z\} \\ \text{with } [R_Z] &= [R_{Z_1} \quad \vdots \quad R_{Z_2}] = 2\pi R[D_Z][J_Z]^{-1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

地盤内の任意箇所での変位

式(2.15)を用いて等価梁の鉛直方向の変位が求めれば、これを用いて地盤内の任意の場所(r - z) の変位を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \{V_r(r)\} \\ \{V_z(r)\} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [X][h_\alpha(r)] \\ [Z][h_\alpha^*(r)g_\alpha] \end{bmatrix} [J_Z]^{-1} \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{V_Z(R)\} \end{bmatrix} \\ \text{with } h_\alpha(r) &= \frac{H_1^{(2)}(\alpha r)}{H_1^{(2)}(\alpha R)} \quad \text{and } h_\alpha^*(r) = \frac{H_0^{(2)}(\alpha r)}{H_0^{(2)}(\alpha R)} \end{aligned} \quad (2.16)$$